**Problèmes de « transvasement ».** — *La méthode du « robot ».* Un autre type de problème, dont je me rappelle qu'il me fut expliqué par des camarades de classe, est le suivant. Un fût, contenant 8 litres de vin, doit être partagé en deux parties égales en n'utilisant pour ce faire que deux récipients vides dont les capacités sont respectivement 5 litres et 3 litres [5].

Ce problème, assez curieux lui aussi, est vieux de plusieurs siècles, si vieux qu'il est impossible d'être plus précis. On peut essayer de le résoudre par la simple expérience mais le nombre d'essais nécessaires peut-être considérablement réduit en schématisant les opérations successives, 3, 5, 0, par exemple, signifiant que l'on a rempli le récipient de 5 litres à partir du fût de 8 litres et ainsi de suite.

**Première solution**

| Récipients | Contenu des récipients en vin | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Etapes successives | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Fût de 8 litres | 8 | 5 | 5 | 2 | 2 | 7 | 7 | 4 | 4 |
| Récipient de 5 litres | 0 | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| Récipient de 3 litres | 0 | 3 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |

Deuxième solution

| Récipients | Contenu des récipients en vin | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Etapes successives | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Fût de 8 litres | 8 | 3 | 3 | 6 | 6 | 1 | 1 | 4 | |
| Récipient de 5 litres | 0 | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 | 4 | |
| Récipient de 3 litres | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 | |

Un mathématicien anglais, le Dr. W. W. Sawyer, publia dans la revue trimestrielle new-yorkaise *Scripta Mathematica* [6] une excellente étude de ce genre de problème, dans laquelle il généralisa le processus de partage. Considérons le cas précédent (8, 5, 3). Règle 1. Si le récipient de 5 litres est vide, le remplir avec le fût de 8. Règle 2. Si le récipient de 5 litres n'est pas vide, deux possibilités s'offrent à nous : a. Si le récipient de 3 litres n'est pas plein, le remplir avec le récipient de 5. Si le récipient de 3 litres est plein, le vider dans le fût de 8 litres. La répétition de ces

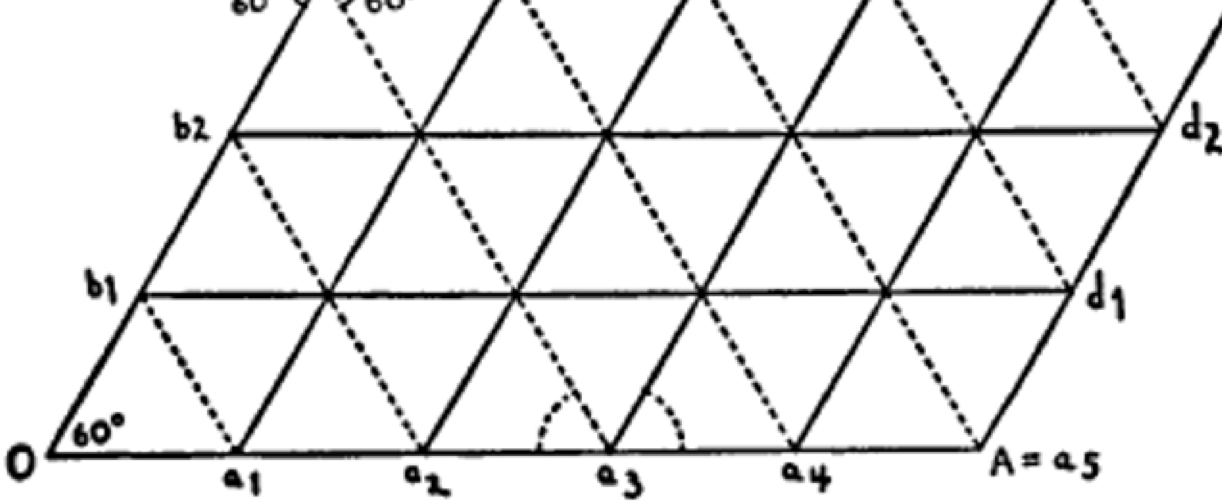


FIG. 16

opérations conduit au résultat désiré. La deuxième solution est conforme à cette règle. Elle s'applique aux cas (24, 17, 7), (12, 7, 5), et à nombre d'autres que l'on peut imaginer.

Le mathématicien russe Y. I. Perelman préfère, quant à lui, que ce calcul soit effectué par un robot. Le travail du robot consiste à se déplacer sur une table de billard ayant la forme inhabituelle d'un parallélogramme avec un angle de 60°. Voici comment il fonctionne.

Afin de résoudre le problème considéré ci-dessus, avec les trois récipient $a = 5$, $b = 3$, $c = 8$, construisons un parallélogramme dont les côtés $OA = 5$, $OB = 3$ font entre eux un angle de 60° (fig. 16). Le robot se déplace sur cette « table de billard », en observant scrupuleusement la loi de la réflexion, à savoir que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence (fig. 17). Sup-

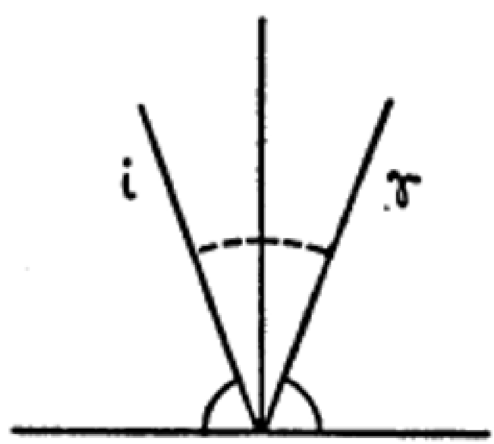


FIG. 17

point, obéissant à la loi mentionnée précédemment, il repart vers le point $a_3$. En effet, la droite $OB$ rencontrant $BC$ sous un angle de 60°, le robot repartira suivant une droite qui fait, elle aussi, un angle de 60° avec $BC$. Cette droite est la bissectrice de l'angle $OBC = 120°$ du losange selon un théorème de géométrie plane bien connu. Ainsi le robot suivra la droite $Ba_3$.

Du point $a_3$, le robot, obéissant toujours à la loi de la réflexion, atteindra successivement les points : $c_3$ $d_1$ $b_1$ $a_1$ $c_1 a_4$.

Autorisons maintenant notre robot à demeurer au point $a_4$ pour un instant, et demandons-nous quel est le rapport entre sa trajectoire et le problème de transvasement qu'il est supposé résoudre ? Pour répondre à cette question examinons l'emplacement de chacun des points atteints par le robot en prenant comme axes de coordonnées les droites $OA$ et $OB$. Pour atteindre, par exemple, le point $c_3$ à partir du point $O$, on peut d'abord se déplacer le long de la ligne $OA$ de trois unités, c'est-à-dire jusqu'au point $a_3$, puis de trois unités le long de la parallèle à $OB$ passant par $a_3$. Nous schématiserons cette propriété sous la forme $c_3$ (3,3). Dans le langage mathématique des spécialistes, les nombres 3,3 sont appelés coordonnées du point $c_3$ dans le système d'axes $OA$, $OB$. Ecrivons maintenant les points d'impact successifs du robot, avec leurs coordonnées respectives : $b_3$ (0,3), $a_3$ (3,0), $c_3$ (3,3), $d_1$ (5,1), $b_1$ (0,1), $a_1$ (1,0), $c_1$ (1,3), $a_4$ (4,0).

Nous sommes maintenant prêts à effectuer le transvasement. Les deux coordonnées de $b_3$ signifient que le robot vous suggère de n'avoir rien (zéro) dans le récipient $a$ et trois unités dans le récipient $b$. Pour le point $a_3$ le robot veut que vous ayez 3 dans le récipient $a$ et rien dans le récipient $b$. Pour $c_3$, le conseil du robot est : trois unités dans chacun des récipients $a$ et $b$ et ainsi de suite. Si le lecteur est troublé au point de comparer la liste de ces nombres avec la première solution du problème, peut-être sera-t-il surpris de constater que les deux ensembles de nombres sont identiques, en d'autre termes que la créature muette (?) qu'est le robot a reproduit notre solution. Une autre surprise est réservée au lecteur qui s'amusera à résoudre le même problème en lançant le robot du point $O$ le long de l'axe $OA$. Il constatera en effet que cette manière d'opérer le conduit à la seconde des deux solutions données précédemment.

des petits losanges, bissectrices des angles de 120°. En règle générale le robot se déplace sur ces deux catégories de droites alternativement. Nous verrons plus loin une exception à cette règle.

Le point final de la trajectoire décrite par le robot peut être déterminé à l'avance. Dans le problème considéré, par exemple, nous voulons que deux des récipients contiennent chacun quatre litres de vin ; par suite le problème sera résolu lorsque $a$ contiendra ce volume, c'est-à-dire lorsque le robot atteindra le point $a_4$ (4,0).

On peut observer que le robot est susceptible de fournir deux solutions à chaque problème : une lorsqu'il est lancé le long de l'axe $OA$, l'autre lorsqu'il est lancé le long de l'axe $OB$.

Le lecteur pourra essayer de résoudre les problèmes $a = 7$, $b = 5$, $c = 12$ ; $a = 9$, $b = 7$, $c = 16$. Dans le premier problème, le robot lancé le long de l'axe $OA$ passera successivement par les points :

$$a_7\ c_2\ a_2\ b_2\ d_2\ c_4,\ a_4\ b_4\ d_4\ c_6\ a_6.$$

En suivant les pérégrinations de notre robot nous admettons tacitement qu'il est muni d'un mécanisme chargé de l'arrêter lorsqu'il atteint le point final (que nous pouvons prédéterminer). La question se pose de savoir ce qui se passerait si ce frein se déréglait et n'arrêtait pas le robot au point $a_4$ relatif à la seconde solution du problème $a = 5$, $b = 3$, $c = 8$. Et bien le robot continuerait tout simplement sa route, sans faillir à la loi de la réflexion et reviendrait à son point de départ, c'est-à-dire au point $O$ après avoir suivi le chemin :

$$a_4\ c_1\ a_1\ b_1\ d_1\ c_3\ a_3\ \ b_3\ 0$$

Si nous examinons le circuit fermé bouclé par le robot, nous observons qu'il comprend les points $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$. Autrement dit, le récipient $a$ contient à un moment ou à un autre les volumes de liquide 1, 2, 3, 4, 5. Cette découverte est très importante car elle montre que nous pouvons résoudre le problème quel que soit le contenu en liquide que nous imposions au récipient $a$, à condition qu'il soit inférieur à 5, bien entendu. Nous élargissons ainsi le champ de ce problème et rehaussons la valeur de la méthode utilisée pour le résoudre. Ainsi dans le problème $a = 7$,

$a = 5$, $a = 12$, nous pouvons imposer que le récipient $a$ contienne 3 litres de vin. Si nous étendons la série des impacts, donnés précédemment, au-delà du point $a_6$ nous obtenons :

$$c_1\ a_1\ b_1\ d_1\ c_3\ a_3\ b_3\ d_3\ c_5\ b_5\ d_5\ 0.$$

Le robot passant par le point $a_3$, notre demande est satisfaite. Par contre, si nous imposons 4 litres de vin dans le récipient $a$, nous n'aurons pas besoin de dépasser le point $a_6$. Notons, en passant, que, là aussi, nous pouvons avoir dans $a$ n'importe quel volume de liquide compris entre 1 et 7.

Est-ce toujours le cas ? Considérons le problème : $a = 6$, $b = 4$, $c = 10$. Le robot nous permet d'obtenir le tableau suivant :

| | $a_6$ | $c_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $d_2$ | $c_4$ | $a_4$ | $b_4$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a =$ | 6 | 2 | 2 | 0 | 6 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| $b =$ | 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| $c =$ | 4 | 4 | 8 | 8 | 2 | 2 | 6 | 6 | 10 |

L'examen de ce tableau révèle qu'aucun des trois récipients ne peut contenir un nombre impair de litres de vin, en particulier le nombre 5 qui permettrait de partager le contenu de $c$ en deux parties égales.

Les exemples que nous avons considéré jusqu'à présent, ont en commun le fait que $c = a + b$. Si $c$ est plus grand que $a + b$, la méthode du « robot » est encore valable. La « table de billard » demeure inchangée, c'est-à-dire que ses côtés demeurent égaux à $a$ et $b$, comme précédemment.

Illustrons cela en résolvant le problème : $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$. Notre fidèle robot suivra le même itinéraire que lors du problème précédent $a = 6$, $b = 4$, $c = 10$, avec les mêmes conséquences, comme le lecteur peut le vérifier aisément.

Notre robot va-t-il continuer à nous jouer le même tour chaque fois que $c$ est supérieur à $a + b$ ? Pour trouver la réponse à cette question, considérons le cas $a = 6$, $b = 4$, $c = 11$. Les trois premières lignes qui constituent la solution du problème $a = 6$, $b = 4$, $c = 10$ demeurent inchangées avec la même limitation pour les récipients $a$ (et $b$). Par contre, la quatrième ligne devient :

$$c = 5\ 5\ 9\ 9\ 3\ 3\ 7\ 7$$

quel nombre impair. En effet n'importe quel volume impair peut être obtenu dans le récipient $c$ ; quant aux volumes pairs ils sont dans l'un ou l'autre récipient ou sont obtenus (8, 10) en ajoutant leurs contenus. Un volume de 1 litre peut même être obtenu dans $c$ en remplissant les deux autres récipients.

Le lecteur pourra étudier les cas $a = 6$, $b = 4$ et $c = 13, 14, 15...$ et essayer de déduire une règle des résultats obtenus.

Lorsque $c$ est inférieur à $a + b$ la situation change du tout au tout. Nous pouvons encore utiliser les services du robot, mais notre table de billard doit être modifiée ; elle doit subir l'amputation d'un de ses coins. Considérons, par exemple, le cas $a = 6$, $b = 4$, $c = 7$. Pour dessiner la table nous traçons, comme précédemment, à 60° l'un de l'autre les axes $OA = 6$ et $OB = 4$. Sur la parallèle à $OA$ passant par $B$ nous portons $BC = 7 - 4 = 3$ et sur la parallèle à $OB$ passant par $A$ nous portons $OD = 7 - 6 = 1$.

La « bande » entourant la table est la ligne brisée $OADCB$ (fig. 18).

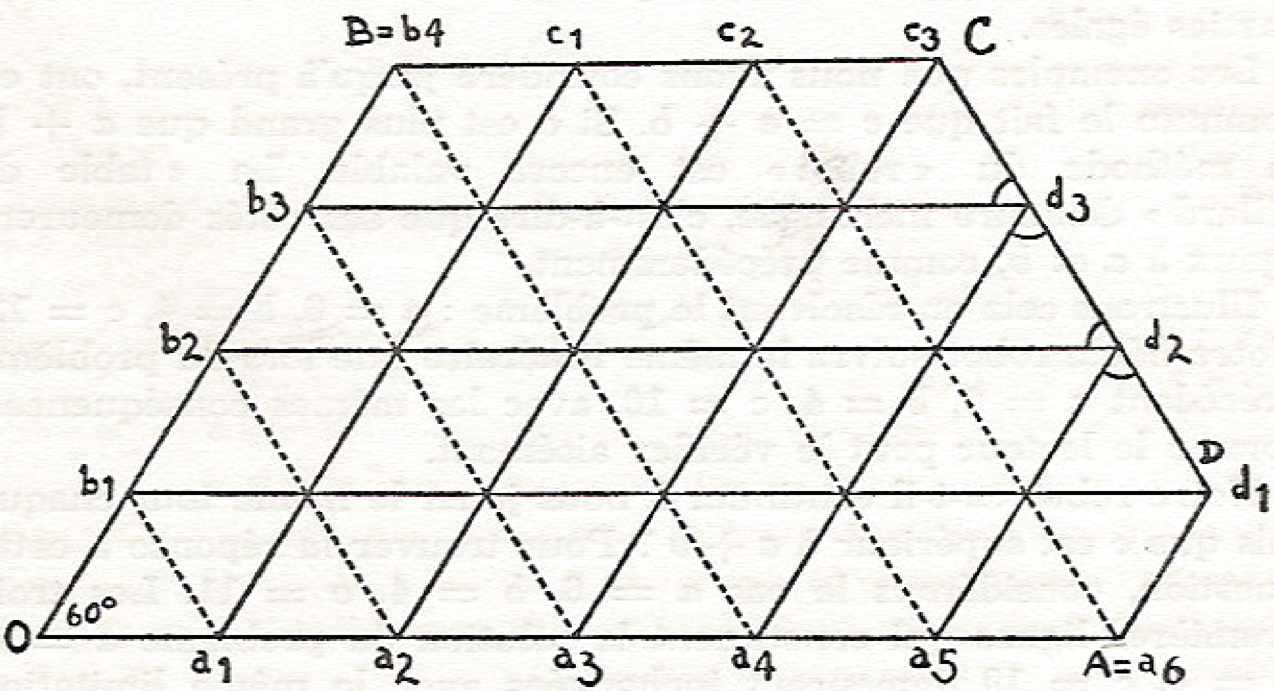


Fig. 18

Si nous lançons notre robot du point $O$ le long de l'axe $OA$, nous obtenons le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | $=$ | 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | 3 | 3 | 0 | 4 | 0 |
| $c$ | $=$ | 1 | 1 | 5 | 5 | 0 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 3 | 3 | 7 |

Au point $d_2$, cette table présente un fait nouveau. La droite $b_2$ $d_2$ rencontre le côté $DC$ de la « bande » sous un angle de 60°. L'autre droite faisait avec $DC$ un angle de 60° en ce point est $d_2$ $a_5$, ligne que suit notre robot, non sans une certaine répugnance d'ailleurs, ayant l'habitude de suivre alternativement une parallèle à un axe et une diagonale. C'est à cette situation exceptionnelle que nous avons fait allusion précédemment.

Remarquons en relation avec ce tableau que nous pouvons avoir dans le récipient $a$ n'importe quel volume de vin compris entre 1 et 6.

Le lecteur pourra s'amuser à résoudre le problème : $a = 9$, $b = 7$, $c = 12$. En construisant, au moyen de l'infatigable robot le tableau correspondant, il pourra se convaincre qu'il peut avoir dans le récipient $a$ n'importe quel volume compris entre 1 et 9 à l'exception de 6, qui est précisément le contenu qui serait nécessaire pour partager le liquide de $c$ en deux parties égales.

Dans le cas $a = 6$, $b = 3$, $c = 9$, pouvons-nous avoir un ou deux litres dans $b$ ? Si vous interrogez le robot, sa réponse sera : non.

Le lecteur intéressé pourra, avec l'aide du robot, résoudre bien d'autres problèmes.